

Reg. No. :

Code No. : 20575 B Sub. Code : SMMA 52

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2021.

Fifth Semester

Mathematics — Main

REAL ANALYSIS — II

(For those who joined in July 2017 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. வழக்கின் மெட்ரிக்கில் $[-3, 5]$ இன் விட்டம்
_____.

(அ) 2 (ஆ) 0

(இ) 8 (ஈ) 5

With usual metric, the diameter of $[-3, 5]$ is
_____.

(a) 2 (b) 0

(c) 8 (d) 5

2. வழக்கமான மெட்ரிக்கில், R -இல் திறந்த பந்து $B(-1, 1)$ என்பது _____.

(அ) $[-2, 0]$ (ஆ) $(-1, 1)$

(இ) $[-1, 1]$ (ஈ) $(-2, 0)$

In R , with usual metric, the open ball $B(-1, 1)$ is _____.

(a) $[-2, 0]$ (b) $(-1, 1)$

(c) $[-1, 1]$ (d) $(-2, 0)$

3. வழக்கமான மெட்ரிக்கில் R -இல் உள்ள ஒவ்வொரு ஓர் உறுப்பு கணமும் _____.

(அ) மூடியது

(ஆ) திறந்தது

(இ) மூடியது மற்றும் திறந்தது

(ஈ) மூடியதுமல்ல, திறந்ததுமல்ல

In R with usual metric, every singleton set is _____.

(a) closed

(b) open

(c) both open and closed

(d) neither open nor closed

4. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ எனில் A -இன் திறட்சிபுள்ளி
_____ ஆகும்.

(அ) 0 (ஆ) 1

(இ) $\frac{1}{n}$ (ஈ) ∞

If $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, then the accumulation
point of A is _____.

(a) 0 (b) 1

(c) $\frac{1}{n}$ (d) ∞

5. $f(x) = x^2$ என வரையறுக்கப்படும் சார்பு $f : R \rightarrow R$
ஆனது R -இன் மீது _____.

(அ) தொடர்ச்சியானது ஆனால் சீரான
தொடர்ச்சியற்றது

(ஆ) சீரான தொடர்ச்சியானது

(இ) தொடர்ச்சியற்றது

(ஈ) தொடர்ச்சியானதுமல்ல, சீரான
தொடர்ச்சியானதுமல்ல

$f : R \rightarrow R$ defined by $f(x) = x^2$ is _____ on R .

- (a) continuous but not uniformly continuous
- (b) uniformly continuous
- (c) not continuous
- (d) neither continuous nor uniformly continuous

6. சார்பு $f : R \rightarrow R$ ஆனது $f(x) = [x]$ என வரையறுக்கப்பட்டின், அலைவு $w(f, 5) =$ _____.

- (அ) 0
- (ஆ) 1
- (இ) 2
- (ஈ) 5

If $f : R \rightarrow R$ is defined by $f(x) = [x]$, then oscillation $w(f, 5) =$ _____.

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 5

7. $R - \{0\}$ ஆனது _____.

- (அ) தொடுத்தது
- (ஆ) தொடுத்தல்
- (இ) கச்சிதமானது
- (ஈ) தொடுத்தது ஆனால் கச்சிதமானதல்ல

$R - \{0\}$ is _____.

- (a) Connected
- (b) Not connected
- (c) Compact
- (d) Connected but not compact

8. R -இன் உட்கணம் _____ ஆனது கச்சிதமானது மற்றும் தொடுத்ததும் ஆகும்.

- (அ) R (ஆ) $(0, 1)$
- (இ) $[0, 100]$ (ஈ) Q

The subset of _____ R is both compact and connected.

- (a) R (b) $(0, 1)$
- (c) $[0, 100]$ (d) Q

9. சார்பு f ஆனது c என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்கது

எனில் $\left(\frac{1}{f}\right)'(c) =$ _____.

- (அ) $\frac{c}{[f(c)]^2}$ (ஆ) $\frac{f'(c)}{[f(c)]^2}$
- (இ) $\frac{-f'(c)}{[f(c)]^2}$ (ஈ) $\frac{f'(c)}{[f(c)]}$

If f is differential at a point c , then $\left(\frac{1}{f}\right)'(c) =$

_____.

(a) $\frac{c}{[f(c)]^2}$

(b) $\frac{f'(c)}{[f(c)]^2}$

(c) $\frac{-f'(c)}{[f(c)]^2}$

(d) $\frac{f'(c)}{[f(c)]}$

10. $f(x) = (1 - x^2)$, $x \in [-1, 1]$ எனில், ரோலின் தேற்றத்தின்படி c -யின் மதிப்பு _____.

(அ) 2

(ஆ) 0

(இ) -1

(ஈ) 1

If $f(x) = (1 - x^2)$, $x \in [-1, 1]$, then by Rolle's theorem the value of c is _____.

(a) 2

(b) 0

(c) -1

(d) 1

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) d_1 மற்றும் d_2 என்பன M -மீதான இரு மெட்ரிக்குகள், $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y)$ எனில், M -இன் மீது d ஒரு மெட்ரிக் என நிறுவுக.

If d_1 and d_2 are two metrics on M and if $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y)$, then prove that d is a metric on M .

Or

(ஆ) எந்தவொரு மெட்ரிக் வெளி (M, d) யிலும் ஒவ்வொரு திறந்த பந்தும் ஒரு திறந்த கணம் என நிரூபி.

Prove that in any metric space (M, d) , each open ball is an open set.

12. (அ) எந்தவொரு மெட்ரிக் வெளியிலும், முடிவில்லா தொகுப்பில் உள்ள மூடிய கணங்களின் வெட்டும் ஒரு மூடிய கணம் என நிறுவுக.

Prove that in any metric space arbitrary intersection of closed sets is closed.

Or

(ஆ) R இல் உள்ள எந்தவொரு வெற்றற்ற திறந்த இடைவெளி (a, b) ஆனது இரண்டாம் வகை என நிரூபி.

Prove that any non empty open interval (a, b) in R is of second category.

13. (அ) (M, d) ஒரு மெட்ரிக் வெளி, $a \in M$ எனில் $f(x) = d(x, a)$ என வரையறுக்கப்படும் சார்பு $f : M \rightarrow R$ ஆனது தொடர்ச்சியானது என நிரூபி.

If (M, d) is a metric space and if $a \in M$, then show that the function $f : M \rightarrow R$ defined by $f(x) = d(x, a)$ is continuous.

Or

(ஆ) $f(x) = \sin x$ என வரையறுக்கப்படும் சார்பு $f : R \rightarrow R$ ஆனது R இன் மீது சீரான தொடர்ச்சியுடையது என நிறுவுக.

Prove that the function $f : R \rightarrow R$ defined by $f(x) = \sin x$ is uniformly continuous on R .

14. (அ) மெய் மதிப்புடைய தொடர்ச்சியான சார்பிற்கான இடைமதிப்பு தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove intermediate value theorem for real continuous function.

Or

(ஆ) ஒரு மெட்ரிக் வெளி M இன் கச்சிதமான உட்கணம் A ஆனது எல்லைக்கு உட்பட்டது என நிரூபி.

Show that any compact subset A of a metric space M is bounded.

15. (அ) f -ஆனது c என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்கது எனில், c -இல் f ஆனது தொடர்ச்சியானது என நிரூபி.

If f is differentiable at c , then show that f is continuous at c .

Or

(ஆ) ரோலின் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Rolle's Theorem.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) R -உள்ள எந்தவொரு திறந்த உட்கணத்தையும் ஒன்றுக்கொன்று பொதுவற்ற எண்ணிடத்தக்க திறந்த இடைவெளிகளின் சேர்க்கையாக வெளிப்படுத்த முடியும் என நிரூபி.

Prove that any open subset of R can be expressed as the union of a countable number of mutually disjoint open intervals.

Or

- (ஆ) (M, d) ஒரு மெட்ரிக் வெளி மற்றும் $\rho(x, y) = 2d(x, y)$ எனில் d மற்றும் ρ ஆகியன இணையான மெட்ரிக் குகள் என நிரூபி.

If (M, d) is a metric space and if $\rho(x, y) = 2d(x, y)$, then prove that d and ρ are equivalent metrics on M .

17. (அ) வழக்கமான மெட்ரிக் கில், C முழுமையானது என நிரூபி.

Prove that C with usual metric is complete.

Or

(ஆ) கேண்டரின் வெட்டும் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove Cantor intersection theorem.

18. (அ) (M_1, d_1) மற்றும் (M_2, d_2) ஆகியன இரு மெட்ரிக் வெளிகள் எனில் $f : M_1 \rightarrow M_2$ தொடர்ச்சியானதாக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை அனைத்து $A \subseteq M_1$ க்கும் $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ எனக் காட்டுக.

If (M_1, d_1) and (M_2, d_2) are two metric spaces, then prove that $f : M_1 \rightarrow M_2$ is continuous iff $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ for all $A \subseteq M_1$.

Or

- (ஆ) $f : [a, b] \rightarrow R$ என்பது ஒரு போக்கு சார்பு எனில், $[a, b]$ -இல் f -இன் தொடர்ச்சியற்ற புள்ளிகளின் கணம் எண்ணிடத்தக்கது என நிரூபி.

If $f : [a, b] \rightarrow R$ is monotonic function, then prove that the set of points of $[a, b]$ at which f is discontinuous is countable.

19. (அ) M என்பது தொடுத்தாக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை ஒவ்வொரு தொடர்ச்சியான சார்பு $f : M \rightarrow \{0, 1\}$ -ம் மேல் கோர்த்தல் அல்ல என நிரூபி.

Prove that M is connected iff every continuous function $f : M \rightarrow \{0, 1\}$ is not onto.

Or

- (ஆ) ஹெய்னி போரல் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Heine-Borel Theorem.

20. (அ) வகையிடலுக்கான சங்கிலி விதி தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove the chain rule for derivatives.

Or

- (ஆ) டெய்லரின் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Taylor's Theorem.
